Optimização em Redes – Definições

Grafo ou ***Rede*** é um par ordenado $G=(V,A)$ onde:

$V=\{1,2,\dots,n\}$ é o conjunto de ***vértices*** ou ***nodos*** ou nós;

$A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ é o conjunto de linhas que representam ligações entre os nodos (correspondência de *V* em *V*); $a_k=(i,j),\ i,j\in V$;

Aos elementos de *A* com orientação chamamos ***arcos*** e aos elementos de *A* não orientados chamamos ***arestas***.

Uma ***rede*** $G=(V,A)$ diz-se ***orientada*** se todos os elementos de *A* são arcos.
Uma ***rede*** diz-se ***não orientada*** se todos os elementos de *A* são arestas.
Se *A* é formado por arcos e arestas a ***rede*** diz-se ***mista***.

Seja $(i,j)\in A$ um arco, então:

i é o ***vértice inicial*** de (i,j); *j* é o ***vértice final*** de (i,j);
j é ***sucessor*** de *i*; *i* é ***antecessor*** (ou ***predecessor***) de *j*.

Seja $(i,j)\in A$ uma aresta, então:

i e *j* são as ***extremidades*** de (i,j); *i* e *j* são ***vértices adjacentes***.

Numa rede orientada chama-se ***caminho orientado*** de $x\in V$ para $y\in V$ a uma sequência de arcos distintos $C(x,y)=\{(x,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_{k-1},x_k),(x_k,y)\}$, de *x* para *y*, onde o vértice final de um arco coincide com o inicial do arco seguinte na sequência e os vértices são todos distintos, com excepção de *x* e *y*. Se $x=y$ o caminho diz-se um ***circuito***.
Se não se tiver em conta a orientação dos arcos, surgem os conceitos de ***caminho não orientado*** (ou ***cadeia***) e de ***ciclo*** (ou ***circuito não orientado***).

Uma rede diz-se ***conexa*** se existe pelo menos uma cadeia entre dois quaisquer dos seus vértices.

Uma ***árvore*** é uma rede conexa e sem ciclos. Dada uma rede $G=(V,A)$, uma árvore com o mesmo conjunto de vértices, *V*, e cujo conjunto de arestas/arcos esteja contido em *A*, diz-se uma ***árvore geradora*** de *G*.

Podem considerar-se diversos parâmetros associados quer aos vértices quer aos arcos e arestas de uma rede (custos, distâncias, tempos, capacidades, ofertas, procuras, etc). Quando se considera a passagem de fluxo numa rede há que definir a ***capacidade de um arco*** (orientado), u_{ij}, como sendo o fluxo máximo que pode passar nesse arco. Por outro lado, existem três tipos de vértices: nodos ***origem***, representando os nodos geradores de fluxo, onde o fluxo que sai do nodo excede o fluxo que nele entra; nodos ***destino***, representando os nodos que absorvem fluxo, onde o fluxo que entra no nodo excede o fluxo que dele sai; nodos ***de transfega*** (***de transshipment***), representando os nodos onde há conservação de fluxo, ou seja, onde o fluxo que sai do nodo iguala o fluxo que nele entra.

Árvore Geradora Mínima

Determinação de uma árvore geradora mínima numa rede não orientada, com comprimentos associados às arestas e do respectivo comprimento total.

Algoritmo de *Prim* (1957)

Objectivo da iteração k

Escolher o nodo que, não estando na árvore, está mais próximo dela e ligá-lo à árvore incluindo-lhe a ligação de menor comprimento incidente nesse nodo.

Repetir até todos os vértices estarem na árvore.

Algoritmo

0. Dados: Rede $G = (V, A)$ não orientada, conexa, com n vértices;
Comprimentos das arestas;

1. Inicialização

Escolher um qualquer vértice e a aresta de menor comprimento nele incidente;

Inicializar a árvore com a aresta seleccionada e os *2* vértices respectivos;

$k \leftarrow 2$;

2. Iteração *k*

Se todos os vértices pertencem à árvore (se $k = n$) **Ir para 3.**

C.c., seleccionar a aresta de comprimento mínimo, entre as arestas incidentes num vértice da árvore e noutro que não lhe pertença;

Juntar à árvore a aresta seleccionada e o vértice em que esta incide e que não pertence à árvore;

$k \leftarrow k + 1$;

Voltar a 2..

3. Desenhar a árvore geradora mínima e determinar o respectivo comprimento total.

FIM.

Notas: Em caso de empate, no passo **2.**, a escolha é arbitrária, só se escolhendo uma aresta de cada vez.

A árvore geradora tem n nodos e $n\!-\!1$ arestas (não tem ciclos).